高中数学三角函数常见习题类型及解法

高考试题中的三角函数题相对比较传统，难度较低，位置靠前，重点突出。因此，在复习过程中既要注重三角知识的基础性，突出三角函数的图象、周期性、单调性、奇偶性、对称性等性质。以及化简、求值和最值等重点内容的复习，又要注重三角知识的工具性，突出三角与代数、几何、向量的综合联系，以及三角知识的应用意识。

一、知识整合

1．熟练掌握三角变换的所有公式，理解每个公式的意义，应用特点，常规使用方法等；熟悉三角变换常用的方法——化弦法，降幂法，角的变换法等；并能应用这些方法进行三角函数式的求值、化简、证明；掌握三角变换公式在三角形中应用的特点，并能结合三角形的公式解决一些实际问题.

2．熟练掌握正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数的性质，并能用它研究复合函数的性质；熟练掌握正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数图象的形状、特点，并会用五点画出函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象；理解图象平移变换、伸缩变换的意义，并会用这两种变换研究函数图象的变化.

2、 高考考点分析

2004 年各地高考中本部分所占分值在 17～22 分，主要以选择题和解答题的形式出现。主要考察内容按综合难度分，我认为有以下几个层次：

第一层次：通过诱导公式和倍角公式的简单运用，解决有关三角函数基本性质的问题。如判断符号、求值、求周期、判断奇偶性等。

第二层次：三角函数公式变形中的某些常用技巧的运用。如辅助角公式、平方公式逆用、切弦互化等。

第三层次：充分利用三角函数作为一种特殊函数的图象及周期性、奇偶性、单调性、有界性等特殊性质，解决较复杂的函数问题。如分段函数值，求复合函数值域等。

三、方法技巧

1. 三角函数恒等变形的基本策略。

（1）常值代换：特别是用“1”的代换，如 $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta=\tan x\cdot\cot x=\tan 45°$ 等。

（2）项的分拆与角的配凑。如分拆项：$\sin^2x+2\cos^2x=(\sin^2x+\cos^2x)+\cos^2x=1+\cos^2x$；配凑角：$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$ 等。

（3）降次与升次。（4）化弦（切）法。

（4）引入辅助角。$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$，这里辅助角 φ 所在象限由 a、b

的符号确定，φ 角的值由 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$ 确定。

2. 证明三角等式的思路和方法。

（1）思路：利用三角公式进行化名，化角，改变运算结构，使等式两边化为同一形式。

（2）证明方法：综合法、分析法、比较法、代换法、相消法、数学归纳法。

3. 证明三角不等式的方法：比较法、配方法、反证法、分析法，利用函数的单调性，利用正、余弦函数的有界性，利用单位圆三角函数线及判别法等。

4. 解答三角高考题的策略。

（1）发现差异：观察角、函数运算间的差异，即进行所谓的“差异分析”。

（2）寻找联系：运用相关公式，找出差异之间的内在联系。

（3）合理转化：选择恰当的公式，促使差异的转化。

四、例题分析

例 1．已知 $\tan\theta=\sqrt{2}$，求（1）$\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$；（2）$\sin^2\theta-\sin\theta.\cos\theta+2\cos^2\theta$ 的值.

解：（1）$\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\dfrac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-3-2\sqrt{2}$；

(2) $\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$$=\frac{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+2}{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1}=\frac{2-\sqrt{2}+2}{2+1}=\frac{4-\sqrt{2}}{3}.$$

说明：利用齐次式的结构特点（如果不具备，通过构造的办法得到），进行弦、切互化，就会使解题过程简化。

例 2．求函数 $y=1+\sin x+\cos x+(\sin x+\cos x)^2$ 的值域。

解：设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则原函数可化为

$y=t^2+t+1=(t+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$，因为 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，所以

当 $t=\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=3+\sqrt{2}$，当 $t=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=\dfrac{3}{4}$，

所以，函数的值域为 $y\in[\dfrac{3}{4},3+\sqrt{2}]$。

例 3．已知函数 $f(x)=4\sin^2 x+2\sin 2x-2$，$x\in R$。

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期、$f(x)$ 的最大值及此时 x 的集合；

（2）证明：函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称。

解：$f(x)=4\sin^2 x+2\sin 2x-2=2\sin x-2(1-2\sin^2 x)$

$=2\sin 2x-2\cos 2x=2\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

(1)所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，因为 $x\in R$，

所以，当 $2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{3\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 最大值为 $2\sqrt{2}$；

(2)证明：欲证明函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称，只要证明对任意 $x\in R$，有 $f(-\frac{\pi}{8}-x)=f(-\frac{\pi}{8}+x)$ 成立，

因为 $f(-\frac{\pi}{8}-x)=2\sqrt{2}\sin[2(-\frac{\pi}{8}-x)-\frac{\pi}{4}]=2\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{2}-2x)=-2\sqrt{2}\cos 2x$，

$f(-\frac{\pi}{8}+x)=2\sqrt{2}\sin[2(-\frac{\pi}{8}+x)-\frac{\pi}{4}]=2\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{2}+2x)=-2\sqrt{2}\cos 2x$，

所以 $f(-\frac{\pi}{8}-x)=f(-\frac{\pi}{8}+x)$ 成立，从而函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称。

例 4． 已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot\cos x+1$ （$x\in R$），

（1）当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

（2）该函数的图像可由 $y=\sin x(x\in R)$ 的图像经过怎样的平移和伸缩变换得到？

解：（1）$y=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot\cos x+1=\frac{1}{4}(2\cos^2 x-1)+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sin x\cdot\cos x)+1$

$=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}(\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}$

所以 y 取最大值时，只需 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，（$k\in Z$），即 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$，（$k\in Z$）。

所以当函数 y 取最大值时，自变量 x 的集合为$\{x|x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z\}$

（2）将函数 y=sinx 依次进行如下变换：

（i）把函数 y=sinx 的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$，得到函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$的图像；

（ii）把得到的图像上各点横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图像；

（iii）把得到的图像上各点纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍（横坐标不变），得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图像；

（iv）把得到的图像向上平移$\frac{5}{4}$个单位长度，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}$的图像。

综上得到 $y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1$ 的图像。

说明：本题是 2000 年全国高考试题，属中档偏容易题，主要考查三角函数的图像和性质。这类题一般有两种解法：一是化成关于 sinx, cosx 的齐次式，降幂后最终化成 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的形式，二是化成某一个三角函数的二次三项式。本题（1）还可以解法如下：

当 cosx=0 时，y=1；当 cosx≠0 时，$y=\dfrac{\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}+1=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x}{1+\tan^2 x}+1$

化简得：$2(y-1)\tan^2x-\sqrt{3}\tan x+2y-3=0$

∵$\tan x\in R$，∴$\triangle=3-8(y-1)(2y-3)\geqslant 0$, 解之得：$\frac{3}{4}\leqslant y\leqslant\frac{7}{4}$

∴$y_{max}=\frac{7}{4}$，此时对应自变量 x 的值集为$\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in Z\}$

例 5．已知函数 $f(x)=\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{3}$.

（Ⅰ）将 $f(x)$写成 $A\sin(\omega x+\phi)$ 的形式，并求其图象对称中心的横坐标；

（Ⅱ）如果△ABC 的三边 a、b、c 满足 $b^2=ac$，且边 b 所对的角为 x，试求 x 的范围及此时函数 $f(x)$的值域.

解：$f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos\frac{2x}{3})=\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{2x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$

（Ⅰ）由$\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3})=0$即$\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in z)$得$x=\frac{3k-1}{2}\pi\quad k\in z$

即对称中心的横坐标为$\frac{3k-1}{2}\pi,\quad k\in z$

（Ⅱ）由已知 $b^2=ac$

$$\cos x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geq\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\leq\cos x<1,\qquad 0<x\leq\frac{\pi}{3},\qquad \frac{\pi}{3}<\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{9}$$

$$\because\ |\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}|>|\frac{5\pi}{9}-\frac{\pi}{2}|,\qquad \therefore\ \sin\frac{\pi}{3}<\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3})\leq1,\qquad \therefore\ \sqrt{3}<\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3})\leq1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即$f(x)$的值域为$(\sqrt{3},1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

综上所述，$x\in(0,\frac{\pi}{3}]$ ，$f(x)$值域为$(\sqrt{3},1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

说明：本题综合运用了三角函数、余弦定理、基本不等式等知识，还需要利用数形结合的思想来解决函数值域的问题，有利于培养学生的运算能力，对知识进行整合的能力。

例 6．在$\triangle ABC$中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，且$\frac{\cos C}{\cos B}=\frac{3a-c}{b}$，

(1)求$\sin B$的值；

(2)若$b=4\sqrt{2}$，且$a=c$，求$\triangle ABC$的面积。

解：(1)由正弦定理及$\frac{\cos C}{\cos B}=\frac{3a-c}{b}$，有$\frac{\cos C}{\cos B}=\frac{3\sin A-\sin C}{\sin B}$，

即$\sin B\cos C=3\sin A\cos B-\sin C\cos B$，所以$\sin(B+C)=3\sin A\cos B$，

又因为$A+B+C=\pi$，$\sin(B+C)=\sin A$，所以$\sin A=3\sin A\cos B$，因为$\sin A\neq0$，所以$\cos B=\frac{1}{3}$，又$0<B<\pi$，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

(2)在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得$a^2+c^2-\frac{2}{3}ac=32$，又$a=c$，

所以有 $\frac{4}{3}a^2=32$，即 $a^2=24$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}a^2\sin B=8\sqrt{2}$。

例 7．已知向量 $\vec{a}=(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$，$\vec{b}=(-\sin\alpha, \cos\alpha)$，$\vec{x}=\vec{a}+(t^2-3)\vec{b}$，

$\vec{y}=-k\vec{a}+\vec{b}$，且 $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$，

(1)求函数 $k=f(t)$ 的表达式；

(2)若 $t\in[-1,3]$，求 $f(t)$ 的最大值与最小值。

解：(1) $a^2=4$，$b^2=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，又 $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$，

所以 $\vec{x}\cdot\vec{y}=[\vec{a}+(t^2-3)\vec{b}]\cdot(-k\vec{a}+\vec{b})=-ka^2+(t^2-3)b^2+[t-k(t^2-3)]\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

所以 $k=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{4}t$，即 $k=f(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{4}t$；

(2)由(1)可得，令 $f(t)$ 导数 $\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}=0$，解得 $t=\pm1$，列表如下：

t	－1	(－1，1)	1	(1，3)
$f(t)$ 导数	0	－	0	+
$f(t)$	极大值	递减	极小值	递增

而 $f(-1)=\frac{1}{2}$，$f(1)=-\frac{1}{2}$，$f(3)=\frac{9}{2}$，所以 $f(t)_{\max}=\frac{9}{2}$，$f(t)_{\min}=-\frac{1}{2}$。

例 8．已知向量 $\vec{a}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta, \sin\beta)$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

(1) 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值；

(2) (2)若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，且 $\sin\beta=-\frac{5}{13}$，求 $\sin\alpha$ 的值。

解：(1)因为 $\vec{a}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta, \sin\beta)$

所以 $a-b=(\cos\alpha-\cos\beta,\sin\alpha-\sin\beta)$

又因为 $|\vec{a}-\vec{b}|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

即 $2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$；

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}<\beta<0$, $0<\alpha-\beta<\pi$，

又因为 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，

$\sin\beta=-\frac{5}{13}$，所以 $\cos\beta=\frac{12}{13}$，所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+\beta]=\cdots=\frac{63}{65}$

例 9．平面直角坐标系有点 $P(1,\cos x),Q(\cos x,1),x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$

（1） 求向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角 θ 的余弦用 x 表示的函数 $f(x)$；

（2） 求 θ 的最值.

解：（1）$\because$ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cdot\cos\theta$，

$\therefore \cos x+\cos x=(1+\cos^2 x)\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{2\cos x}{1+\cos^2 x}$

即 $f(x)=\frac{2\cos x}{1+\cos^2 x}\qquad(-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4})$

（2）$\therefore \cos\theta=\frac{2}{\cos x+\frac{1}{\cos x}}$，又 $\cos x+\frac{1}{\cos x}\in[2,\frac{3\sqrt{2}}{2}]$，

$\therefore \cos\theta\in[\frac{2\sqrt{2}}{3},1]$，$\therefore \theta_{\min}=0$，$\theta_{\max}=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

说明：三角函数与向量之间的联系很紧密，解题时要时刻注意。